HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI
TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2011
MÔN: TOÁN, khối A, ngày 4/7/2011

(Giáo viên: Tổ Toán Hocmai.vn)

Câu I (*2,0 điểm*)

1. - TXĐ: $x \in R \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

- Tiệm cận: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{-x+1}{2x-1} = \infty \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x+1}{2x-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

- Sự biến thiên: $y' = \frac{-1}{(2x-1)^2} < 0 \quad \forall x \neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$-\frac{1}{2} \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\frac{1}{2}$

- Đồ thị *(Các em tự vẽ hình)*

Đồ thị nhận $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ là giao hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{-x+1}{2x-1} = x + m \qquad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \qquad (*)$

Ta thấy $\Delta' = m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 > 0 \quad \forall m$

Và $2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2m.\frac{1}{2} - m - 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $\neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$Đường thẳng y = x + m luôn cắt (C) tại 2 điểm A, B phân biệt

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*) thì $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

Tiếp tuyến của (C) tại A, B có hệ số góc lần lượt là:

$$k_1 = y'(x_1) = \frac{-1}{(2x_1-1)^2} \quad ; \quad k_2 = y'(x_2) = \frac{-1}{(2x_2-1)^2}$$

Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = \dfrac{-m-1}{2} \end{cases}$

$$k_1 + k_2 = \frac{-(2x_1-1)^2 - (2x_2-1)^2}{(4x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1)^2} = \frac{-\left[4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2\right]}{(-2m - 2 + 2m + 1)^2}$$

$= -(4m^2 + 4m + 4 + 4m + 2) = -(4m^2 + 8m + 6)$

$= -4(m+1)^2 - 2 \leq -2$

$\Rightarrow k_1 + k_2$ đạt max khi $m = -1$.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. ĐK: x $\neq k\pi (k \in Z)$

Phương trình:

$\Leftrightarrow (1 + \sin 2x + \cos 2x)\sin^2 x = \sqrt{2}\sin x \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left[1 + \sin 2x + \cos 2x - 2\sqrt{2}\cos x\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left[2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\cos x\left[2\sin x + 2\cos x - 2\sqrt{2}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} (k \in z)$$

2. Xét (2) $\Leftrightarrow xy(x+y)^2 - 2x^2y^2 + 2 - (x+y)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(xy-1) - 2(xy-1)(xy+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2+2xy-2xy-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1: xy = 1, thay vào (1) ta được:

$5x-4y+3y^3-2x-2y=0$

$\Leftrightarrow 3y^3+3x-6y=0$

$\Leftrightarrow y^4+1-2y^2=0$

(Nhân hai vế với $y\neq 0$; vì xy = 1)

$$\Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1; x=1 \\ y=-1; x=-1 \end{cases}$$

+ Trường hợp 2: $x^2+y^2=2$ thì $y^2=2-x^2$

Thay vào (1): $5x^2y-4xy^2+3y(2-x^2)-2x-2y=0$

$\Leftrightarrow 2x^2y-4xy^2-2x+4y=0$

$\Leftrightarrow xy(x-2y)-(x-2y)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ xy=1 \end{cases}$$

Trường hợp xy = 1 đã xét ở trên

Trường hợp x = 2y, kết hợp $x^2+y^2=2$ được

$$5y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\sqrt{\frac{10}{5}}$$

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm:

$$(x;y)=(1;1);(-1;-1);(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5});(\frac{-2\sqrt{10}}{5};\frac{-\sqrt{10}}{5})$$

Câu III (1,*0 điểm*)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+\cos x+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln|x\sin x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln(\frac{\pi\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{8})$$

Câu IV (1,*0 điểm*)

1. N là trung điểm AC

SA=ABtanSBA=2a$\sqrt{3}$

Diện tích $ABC=\frac{1}{2}.2a.2a=2a^2$

Diện tích $AMN=\frac{1}{2}.a.a=\frac{1}{2}a^2$

Diện tích đáy là $S = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$

Thể tích V = $a^3\sqrt{3}$

2. Gọi P là trung điểm BC thì NP // AB => AB // (SNP)

$d\left[AB, SN\right] = d\left[AB,(SPN)\right] = d\left[A,(SPN)\right] = d\left[C,(SPN)\right]$ vì trung điểm N của AC thuộc mp (SPN)

$$V_{SPCN} = \frac{1}{3}SA.S_{PCN} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{\sqrt{3}}$$

$$PN = \frac{1}{2}AB = a$$

Kẻ AH $\perp$ PN tại H thì: $\left.\begin{matrix} PN \perp AH \\ PN \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow PN \perp (SAH) \Rightarrow SH \perp PN$ tại H

$\Rightarrow$SH là đường cao ΔSPN

ΔSAH vuông tại A, AH = BP = a nên:

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = a\sqrt{13} \Rightarrow S_{SPN} = \frac{1}{2}a\sqrt{13}.a = \frac{a^2\sqrt{13}}{2}$$

$$d\left[C;(SPN)\right] = \frac{3V_{SPCN}}{S_{SPCN}} = \frac{a^2\sqrt{13}}{\frac{a^2\sqrt{13}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

Câu V (*1,0 điểm*)

Xét P (Z) = $\frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

Nếu x = y $\in[1;4]$ thì P (Z)= $\frac{6}{5}\forall Z \in[1;x]$

Nếu x > y:

$$P'(Z) = \frac{-y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(x+z)^2}$$

$$= \frac{x(y+z)^2 - y(x+z)^2}{(y+z)^2(x+z)^2}$$

$$= \frac{(x-y)(z^2 - xy)}{(y+z)^2(x+z)^2}$$

Vì x > y, nên x – y > 0, và P'(Z)= 0 khi $Z = \sqrt{xy} < x$

Vậy P (Z)$\geq P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+x}$

$$= \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3} + \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}$$

Đặt t = $\sqrt{\frac{x}{y}}$, vì $1 \le y \le x \le 4 \Rightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 4 \Rightarrow 1 \le t \le 2$

Câu VI.a (2,*0 điểm*)

1. (C) : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

(C) có tâm I(2;1); bán kính R = $\sqrt{5}$

SMAIB = 10 $\Leftrightarrow$ MA.R = 10 (vì IA = IB = R, MA = MB)

$\Leftrightarrow$MA = $\frac{10}{\sqrt{5}}$ = $2\sqrt{5}$

Do đó: $MI = \sqrt{MA^2 + IA^2} = \sqrt{20+5} = 5$

Giả sử tọa độ M thuộc Δ là (a; -a-2)

Ta có: MI = 5 $\Leftrightarrow$ $MI^2 = 25$

$\Leftrightarrow$ $(a-2)^2 + (-a-2-1)^2 = 25$

$\Leftrightarrow$ $2a^2 + 2a + 13 = 25$

$\Leftrightarrow$ $a^2 + a - 6 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -3 \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn đề bài: $M_1(2;-4)$ và M_2 (-3;1)

2. MA = MB $\Rightarrow \in$ Mặt phẳng trung trực (Q) của A. Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm I (1; -1; 2) của AB và nhận $\vec{AB}(-2;-2;2)$ làm VTCP nên pt (Q) : -2(x- 1) – 2(y- 1) + 2(z- 2) = 0

$\Leftrightarrow$x + y- z +2 = 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ M \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_M - y_M - z_M + 6 = 0 \\ x_M + y_M - z_M + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M - 2y_M + 6 = 0 \\ x_M - 2y_M + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2y_M - 2 \\ z_M = \dfrac{3x_M + 6}{2} = 3y_M \end{cases}$$

Hay M có tọa độ : (2b- 2; b; 3b)

MA = 3 .

$$(2b-2-2)^2 + b^2 + (3b-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 14b^2 - 22b + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = \dfrac{4}{7} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn $M_1(0\ ;\ 1;\ 3)$ và M_2 $(\frac{-6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7})$

Câu VII.a (1,*0 điểm*)

Gọi $Z = a + bi\ (a, b \in R)$

$$Z^2 = |Z|^2 + \overline{Z} \Leftrightarrow (a+bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi$$

$$a+2b^2=(2ab+b)i \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b^2=0 \\ 2ab+b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b^2=0 \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ a=-\dfrac{1}{2};b=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta có 3 đáp án: $Z_1=0;\ Z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i;\ Z_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Câu VI.b.

1. Gọi $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$ $\quad x_A,x_B>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A{}^2+4y_A{}^2=4(1) \\ x_B{}^2+4y_B{}^2=4(2) \end{cases}$$

ΔABC cân $\Rightarrow$ OA = OB $\Rightarrow x_A{}^2+y_A{}^2=x_B{}^2+y_B{}^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \begin{cases} x_A=x_B \\ y_A=-y_B \\ x_A=4-4y_A{}^2 \end{cases}$

$\overrightarrow{OA}=(x_A;y_A)$; $\overrightarrow{OB}=(x_B;y_B)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA.OB.\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \Rightarrow |x_Ax_B+y_Ay_B|=(x_A{}^2+y_A{}^2)\sqrt{(1-\sin^2 AOB)}$$

$$\Rightarrow |x_A{}^2-y_A{}^2|=(x_A{}^2+y_A{}^2)\sqrt{(1-\sin^2 AOB)} \Rightarrow \sin^2 AOB=1-\frac{(x_A{}^2-y_A{}^2)^2}{(x_A{}^2+y_A{}^2)^2}$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA^2.\sin AOB \Rightarrow S^2=\frac{1}{4}(x_A{}^2+y_A{}^2)^2.\left[1-\frac{(x_A{}^2-y_A{}^2)^2}{(x_A{}^2+y_A{}^2)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}(4-3y_A{}^2)^2-\frac{1}{4}(4-5y_A{}^2)^2$$

$$=-\frac{1}{4}(16y_A{}^4-16y_A{}^2)=-(2y_A{}^2-1)^2+1\le 1$$

Dấu " = " xảy ra khi: $y_A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \to y_A=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_A=x_B=\sqrt{2}$

Vậy $A\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc ngược lại.

2. Gọi $B(x_B;y_B;z_B)$

$\Rightarrow OA^2=32$

$OB^2=x_B{}^2+y_B{}^2+z_B{}^2=OA^2$

$OC^2=(x_B-4)^2(y_B-4)^2+z_B=64-8x_B-8y_B$

$AB^2=32 \Rightarrow x_B+y_B=4 \quad (1)$

$B \in (S) \Rightarrow x_B{}^2+y_B{}^2+z_B{}^2-4x_B-4y_B-4z_B=0$

$\Rightarrow 32-4.4-4z_B=0 \Rightarrow z_B=4 \Rightarrow x_B{}^2+y_B{}^2=32-z_B{}^2=16 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_B=0 \to y_B=4; z_B=4 \\ x_B=4 \to y_B=0; z_B=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(0;4;4) \\ B(4;0;4) \end{array}\right.$

Suy ra phương tình là: $\left[\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right.$

Câu VII.b.

Đặt $Z=a+bi \ (a,b\in Z)$

$$pt \Leftrightarrow (3a-3b-2)+(b+a)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b-2=0 \\ b+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |Z|=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Giáo viên: Tổ Toán Hocmai.vn

Nguồn : Hocmai.vn